

# Una mirada sobre los Espacios de trabajo matemático

Alain Kuzniak

Laboratoire de Didactique André Revuz  
Universidad Paris Diderot  
France

ETM 4.1 Abril 2015

El trabajo matemático como tema crucial de estudio

Noción de Espacio de Trabajo Matemático

El caso particular de la Geometría

El diagrama de los ETG

Malentendidos en el aula

## Origen y finalidad de nuestras investigaciones inicialmente en geometría

### Tres direcciones distintas

1. Elaborar un marco teórico para estudiar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escolaridad obligatoria y también en la formación de los profesores.
2. Permitir comparar la enseñanza de las matemáticas en diferentes instituciones o países.
3. Centrado en el “trabajo matemático” visto como central.

# La pregunta siempre nueva sobre la utilidad de las matemáticas y de su aprendizaje

## Un ensayo de Arbuthnot en 1701

1. Para desarrollar la Mente y el Razonamiento  
“Truth is the same thing to the Understanding as Music to the Ear and Beauty to the Eye”
2. Para las aplicaciones en una gran diversidad de campos  
(Comercio, Navegación, arte de la guerra ...)
3. Para saber cómo llegar a los resultados y no sólo los resultados.  
Un método para liberar la mente de la superstición.

## À bas Euclide – Bajo Euclides ?

### Algunos puntos de vista conflictivos

1. Las matemáticas modernas: el eslogan provocador de Dieudonné presta atención a la distancia existente entre la geometría tradicional basada sobre el triángulo y la geometría contemporánea.
2. Contrarreforma: Bajo Euclides que no da la Ruta Real a las aplicaciones y al uso de la geometría en el mundo real.
3. Euclides como el primer didáctico ...

# Desarrollar la enseñanza de las matemáticas y las investigaciones en didáctica

## En un contexto específico

1. Una tensión entre visiones utilitarista e idealista
2. Utilizar las nuevas herramientas que cambian los métodos para descubrir y probar
3. “Hacia una nueva alfabetización matemática” que revisa las relaciones de los ciudadanos con la la verdad y la prueba

# La finalidad de nuestros investigaciones inicialmente en geometria

## Tres direcciones distintas

1. Elaborar un marco teórico para estudiar la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la escolaridad obligatoria y también en la formación de los profesores.
2. Permitir comparar la enseñanza de la Geometría en diferentes instituciones o países.
3. Centrado en el “trabajo matemático” visto como central.

## El trabajo matemático como tema crucial de estudio

### Trabajo matemático y actividad: Habermas

Por trabajo o actividad racional con respecto a un fin, entiendo una actividad instrumental, o una elección racional, o bien una combinación de ambos.

Articulación entre reglas técnicas y estrategias a partir de saberes

### Según Thurston

Las matemáticas incluyen los números enteros y la geometría de las figuras y de los sólidos

Las matemáticas son lo que los matemáticos estudian

Los matemáticos son esos seres humanos que profundizan el entendimiento humano de las matemáticas.



# El trabajo matemático

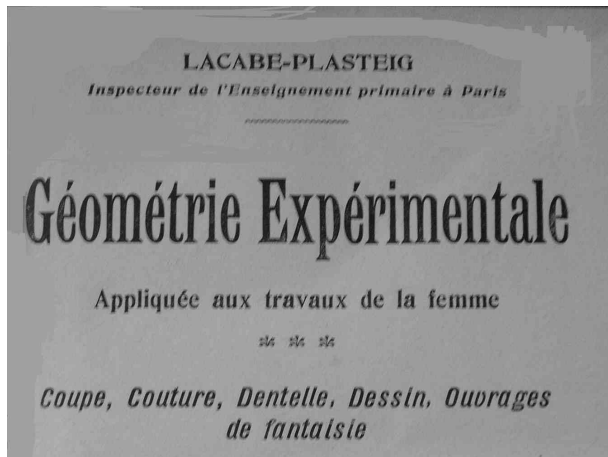
## La naturaleza de este trabajo

1. En un contexto de descubrimiento : intuición, experimentación..
2. En un contexto de justificación : probar, demostrar
3. En un contexto de comunicación : comprender, explicar, presentar...

# Geometria experimental 1911

## Aplicada a los trabajos de la mujer

### Escuela para niñas entre 12 y 14 años



## Geometría aplicada a los trabajos de la mujer

Introducción de los términos y de las definiciones geométricas a partir de soportes unidos al mundo del corte de los tejidos

### Un plan de hilos

En la práctica, consideramos los hilos de cadena, llamados simplemente hilo, y los hilos de trama, llamados duites, como siendo perpendiculares los unos a los otros.

Cuando la recta que hay que trazar es perpendicular a la cadena o a la trama, basta con sujetar con alfileres un hilo, un duite y su punto de cruce, para determinar un ángulo recto (p. 20).

## Geometría aplicada a los trabajos de la mujer

Ir y volver entre las observaciones sobre los objetos y las aplicaciones a la costura.

Es fácil cortar rápidamente un rombo dada su diagonal , o conociendo su lado.

Observemos, con este fin, que si se hace girar una porción de rombo alrededor de una u otra diagonal, la parte móvil recubre exactamente la parte fija. Después de dos pliegues a ángulo recto, obtenemos cuatro triángulos rectángulos superpuestos.

## Geometría aplicada a los trabajos de la mujer

Ir y volver entre las observaciones sobre los objetos y las aplicaciones a la costura.

Como consecuencia, si se quiere recortar un rombo en una tela, la doblamos sobre si misma para formar cuatro ángulos rectos alrededor de un punto; luego, de un solo golpe de tijeras, dirigido según la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cortamos los cuatro espesores y desplegamos (p. 63)

## Espacio de Trabajo Matemático

Un espacio de trabajo matemático (ETM) es un espacio organizado para favorecer el funcionamiento del trabajo matemático (en un contexto educativo).

- ▶ La elección de un espacio de trabajo matemático ¿ Debe privilegiar las aplicaciones en mundo real o estar orientado hacia las matemáticas?
- ▶ La construcción del espacio de trabajo matemático En el caso de una interacción fuerte con el mundo real, el problema de la confusión posible entre el objeto geométrico y su origen concreto
- ▶ La naturaleza efectiva de este espacio para los diferentes usuarios. El novicio corre el peligro de ver aquí sólo un trabajo de costura inútilmente complicado por consideraciones anexas, el profesor piensa hacer una geometría de tipo teórico, el experto percibe la oscilación

## Espacio de Trabajo Geométrico y Matemático

Un espacio de trabajo geométrico (ETG) es un espacio organizado para favorecer el funcionamiento del trabajo geométrico (en un contexto educativo).

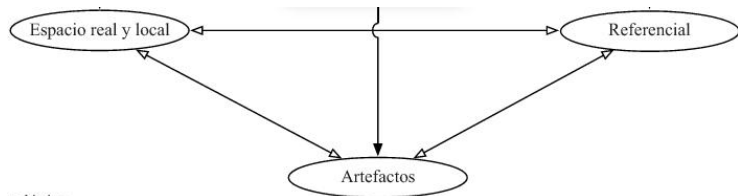
Basado en dos dimensiones

- ▶ Un nivel epistemológico
- ▶ Un nivel cognitivo

## El nivel epistemológico

### Tres componentes

- ▶ Un espacio real y local como soporte material, con un conjunto de objetos concretos y tangibles;
- ▶ un conjunto de artefactos como herramientas de dibujo o software;
- ▶ un sistema teórico de referencia basado en definiciones y propiedades.

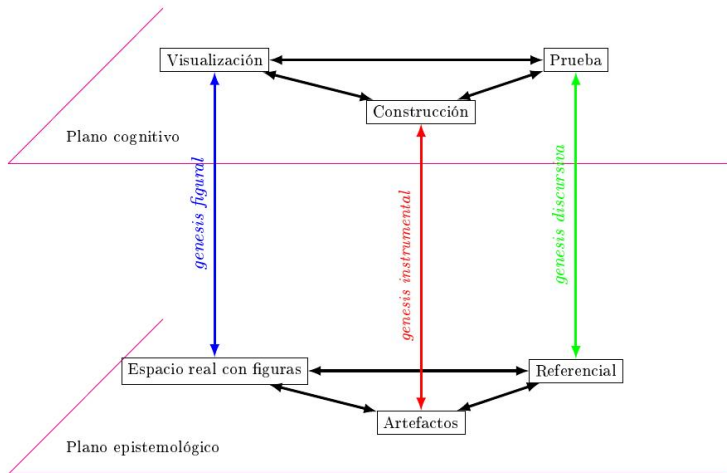




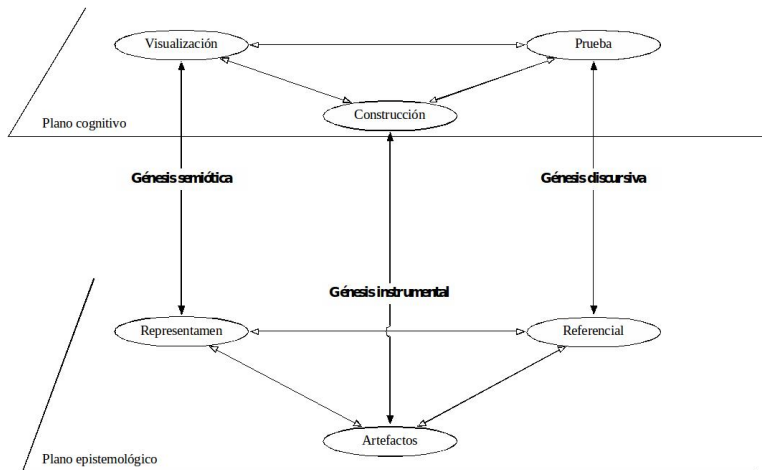
## El nivel cognitivo

- ▶ Un proceso de visualización relativo a la representación del espacio y al soporte material;
- ▶ Un proceso de construcción que depende de los instrumentos utilizados y configuraciones geométricas en juego;
- ▶ Un proceso discursivo que produce argumentaciones y pruebas.

# Un punto de vista global sobre el Espacio de Trabajo Geométrico



## Extender la noción : Espacio de Trabajo Matemático



## Varias geneeses

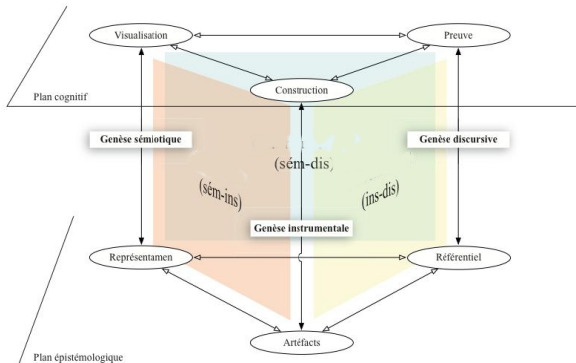
Ambos niveles, cognitivo y epistemológico, tienen que ser articulados con el fin de garantizar un enfoque coherente y completo del trabajo geométrico. Este proceso supone algunas transformaciones que es posible identificar a través de tres fundamental génesis relacionados con nuestro diagrama:

## Varias geneeses

- ▶ una génesis instrumental que hace funcional los artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático ;
- ▶ una génesis semiótica basada particularmente en los registros de representación semiótica, que proporciona un sentido a los objetos del ETM y les confiere su estatus de objetos matemáticos operatorios;
- ▶ una génesis discursiva de la prueba que utiliza las propiedades en el referencial teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de una validación no exclusivamente icónica, gráfica o instrumentada.

## la circulación del saber matemático

Se tratará de aclarar más particularmente de ver en la circulación del saber matemático concebido a través de la modelización del Espacio de Trabajo Matemático concebido tres planes(planos) principales de interacción [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis].



# Tales en el ETM idonéo potential

## Ejercicio en un libro de Grado 9.

**! Attention :** Il peut y avoir plusieurs réponses exactes pour chaque énoncé ! Les trouver toutes.

A

B

C

Si échec,  
revoir :

● Pour les exercices 45 à 54, on utilise les figures suivantes :

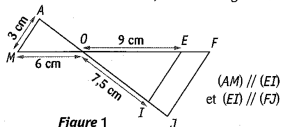


Figure 1

Les points A, O, I et J sont alignés.  
Les points M, O, E et F sont alignés.

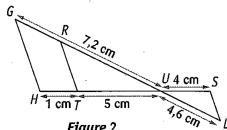


Figure 2

Les points G, R, U et L sont alignés.  
Les points H, T, U et S sont alignés.

# Tales en el ETM idonéo potencial

**!** **Attention :** Il peut y avoir plusieurs réponses exactes pour chaque énoncé ! Les trouver toutes.

A

B

C

Si échec,  
revoir :

● Pour les exercices 45 à 54, on utilise les figures suivantes :

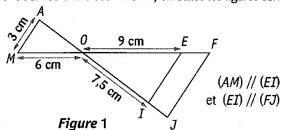


Figure 1

Les points A, O, I et J sont alignés.  
Les points M, O, E et F sont alignés.

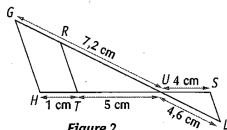


Figure 2

Les points G, R, U et L sont alignés.  
Les points H, T, U et S sont alignés.

**45.** Sur la figure 1,  
le triangle  $AOM$  est  
une réduction du triangle  $IOE$   
de rapport :

 $\frac{3}{9}$  $\frac{9}{6}$  $\frac{2}{3}$ 

p. 206



## ETM idoneo

### El docente cambio la tarea

¿ Cuándo le decimos que un triángulo es una reducción de otro esto no os recuerda ninguna propiedad? ¿ Algún teorema? Y esto es daño porque acabamos de hablar de eso hace 5 minutos.

¿ Entonces cual teorema debe aplicarse cuando se tiene una configuración como ésta?

Frente al silencio de los alumnos, repite la figura trazada a la pizarra comentándolo, luego procede a la verificación de cada una de las condiciones de la aplicación del teorema de Tales.

## Efecto Topaze

### Condición de alineación y rectas secantes

Docente :¿ Están seguros? ¿ Ustedes tienen lo que hace falta?

¿ Nos hacen falta puntos cómo?

Alumnos : Alineados

Docente: Pues no hacen rectas se...

Alumnos: Secantes

Docente T: Como se llaman?

Alumnos: (ME) et (AI)

Docente T : (ME) et (AI) estan secantes en O. Tenemos los 5 puntos que intervienen.

## ETM idoneo

### Condición de paralelismo

Docente T: ¿ De más, que nos hace falta otro?

Alumnos: Rectas paralelas

Docente T: Me hace falta rectas paralelas que se llaman (AM)

y...

Alumno: (EI) y (FJ)

Docente T: ¿ acaso lo necesitas? Mira el ejercicio.

Alumnos: Euh, no.

Docente T: (AM) y (IE)

## Solitud...

La conclusión: aplicación del teorema y la igualdad de los cocientes

Docente T: y en este caso, usted puede aplicar el teorema de...

Alumnos: Tales

¿ Docente T: Et esto le permite escribir qué?

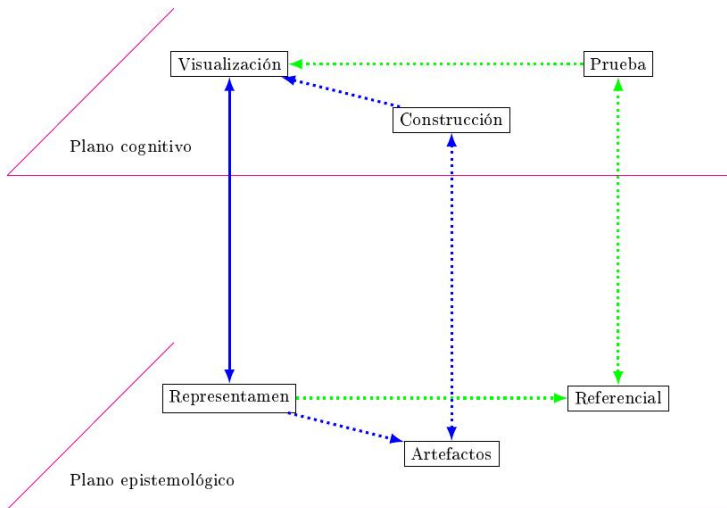
Alumnos: cocientes

Docente T: ¿ y cuáles?

Alumnos: OE sobre...

Docente T: **Comience más bien con OM**

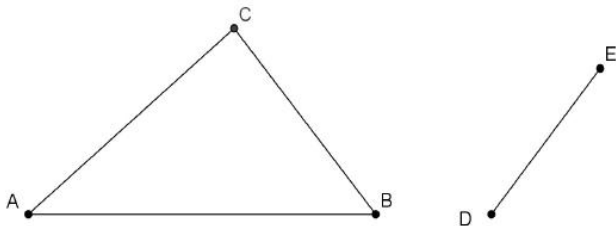
## Los Espacios de Trabajo Geométrico : ver el trabajo



## Semejanza de triángulo en el aula Grade 10

Construir un triángulo de tal manera que  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  and  $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

Partie I : Créer un triangle DEF tel que  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  ,  $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$  .

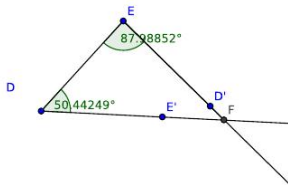
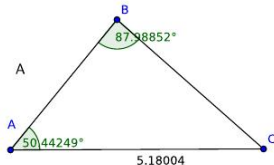


- ▶ Que podemos decir sobre  $\widehat{ACB}$  y  $\widehat{DFE}$
- ▶ Con la regla, comparar los lados de los triángulos; Que pueden observar?
- ▶ Completar el texto : Podemons hacer la conjetura que si dos triángulos tienen ... entonces sus lados son ...

# Semejanza de triangulo en el aula

## Con un software

Construir un triangulo de tal manera que  $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$  and  $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$



## El malentendido global o Cuando la demostración es la demostración

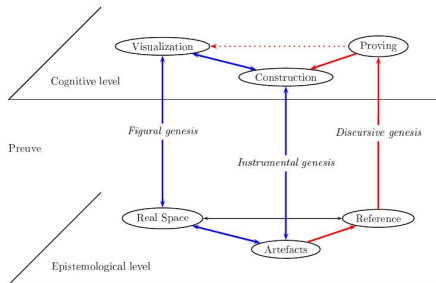
- ▶ Docente: Hemos demostrado la propiedad?
- ▶ Alumnos : Si, lo hicimos una demostración
- ▶ Docente: No, es demasiado impreciso



# La ruptura entre dos enfoques de la geometría

## Para el docente

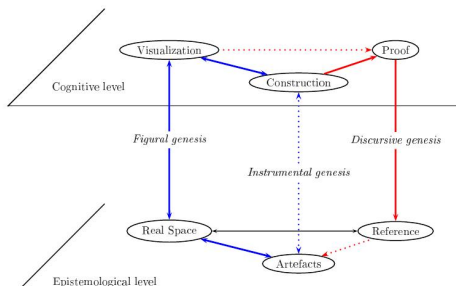
- ▶ La construcción es simple y no va a causar problemas
- ▶ Motivar a la entrada en Geometry II con un primer trabajo en Geometría I: para motivar la prueba formal
- ▶ Un dibujo visto como una figura genérica



# Una ruptura con el ETG personal de los estudiantes

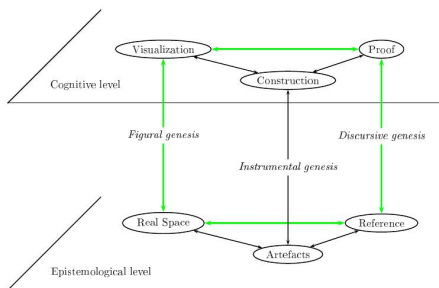
Para ellos

- ▶ Para construir con herramientas es complejo y necesita un largo tiempo
- ▶ Debido a la diversidad de los resultados, una gran diversidad de propiedades son elaboradas por los alumnos
- ▶ Una figura particular sin generalización soporte del trabajo



## Malentendido y contrato didáctico

- ▶ El trabajo de construcción realizado por los estudiantes es ignorado por el profesor
- ▶ El software como fuente de la Verdad
- ▶ La conjetura como base del acuerdo entre todos.
- ▶ Prueba experimental y prueba basada sobre axiomas



## Investigaciones en relacion con los ETM

- ▶ Estudio de los ETM en los otros dominios(en matemáticas):  $ETM_{Dominio}$ 
  - ▶ Geometría y números: los números reales y complejos y geometrización.
  - ▶ Problema de modelización basada sobre situaciones geométricas con el uso de software -> Analisis, funciones y pruebas ...
- ▶ Utilizar el modelo como herramienta de formación docente
  - ▶ Identificar temas cruciales.
  - ▶ Describir sesiones de clase