

XXXIX SEMANA DE LA MATEMATICA 2013  
Instituto de Matemáticas  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

NIVELES DE CUERPOS, ANILLOS Y ESPACIOS  
TOPOLOGICOS

RICARDO BAEZA,  
U. DE TALCA

RESUMEN. Si  $A$  es un anillo conmutativo, el nivel  $s(A)$  de  $A$  es el entero minimal  $r$  tal que  $-1$  es una suma de cuadrados en  $A$  ( $s(A)$  puede ser infinito).  $s(A)$  es un invariante algebraico importante de  $A$  y difícil de calcular. En este cursillo estudiaremos el problema de determinar que enteros se pueden realizar como nivel de un anillo. La respuesta depende de la estructura de los anillos que se consideren, p.ej. si nos restringimos solo a cuerpos, el nivel es una potencia de 2 y todas las potencias de 2 son realizables. Determinar si un entero arbitrario es realizable como nivel de un anillo es un problema difícil si se trata en forma puramente algebraica, pero argumentos topológicos, basados en el teorema de Borsuk-Ulam dan una rápida respuesta. Esto nos llevará a introducir el concepto de nivel de un espacio topológico  $X$  con involución y a relacionarlo con el nivel algebraico del anillo de funciones continuas de  $X$  en los complejos compatibles con la involución. Durante el curso daremos también una demostración algebraica del teorema de Borsuk-Ulam.